LİNEER OPERATÖRLERİN YARI-GRUPLARI

Gözde AVCI

Lisans Bitirme Tezi

DANIŞMAN: Doç. Dr. Yonca SEZER

Matematik Bölümü, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, Türkiye

ÖZET: Bu bitirme çalışmasında, lineer operatörlerin yarı-gruplarına temel bir giriş yapılarak yarı-grupların tanımı, bazı önemli örnekleri ve özellikleri verilmiştir. Düzgün sürekli yarı-grup kavramını tanıttıktan sonra güçlü sürekli yarı-grup kavramı verilmiş; lineer operatörün hangi koşullar altında güçlü sürekli yarı-grup ürettiğini gösteren teoremlere yer verilmiştir.

GİRİŞ: Yarı-gruplar, yaygın olarak evrim denklemleri olarak bilinen geniş bir problem sınıfını çözmek için kullanılır.

Fizik, kimya, biyoloji, mühendislik ve ekonomi gibi birçok disiplinde genellikle adi veya kısmi bir diferansiyel denklem içeren başlangıç değer problemleri karşımıza çıkmaktadır. Bir başlangıç değer problemini doğrudan incelemek yerine, problem önce evrim denklemine indirgenir ve daha sonra yarı-grup teorisi kullanılarak çözümün mevcut ve tek olduğu belirlenir.

Yarı-grup Temel Tanımı

S kümesi boştan farklı bir küme, $*: S \times S \to S$ işlemi de S kümesi üzerinde $\forall\, x, y, z \in S$ için $(x * y) * z = x * (y * z)$ birleşme özelliğini sağlayan ikili işlem olsun. $(S,*)$ ikilisine yarı-grup denir.

Bir yarı-grubun (bir gruptan farklı olarak) birim elemana ve ters elemana sahip olmasına gerek yoktur. Bu nedenle, yarı-gruplarla çözülebilen birçok problem sadece ileri yönlü çözülebilir (örn. zamanda ileri yönlü problemler).

Yarı-grupların en basit örneklerinden bazıları şunlardır:

1.) $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerinde 2×2 tipindeki matrisler olmak üzere $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}),\times)$ ikilisi bir yarı-gruptur.

2.) $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere $(\mathbb{N},+)$ bir yarı-grup oluşturur.

Yarı-grup Tanımı: X bir Banach uzayı olsun. X'ten X'e sınırlı lineer operatörleri tek parametreli bir T(t) ailesi,

$(0 \le t < \infty)$, eğer aşağıdaki (i) ve (ii) özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde sınırlı lineer operatörlerin bir yarı-grubu adını alır:

(i) $T(0) = I$ (I, X üzerindeki birim operatörüdür.)

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)\ \forall\, t, s \ge 0$ (yarı-grup özelliği)

YARI-GRUP ÖRNEKLERİ

Matris Yarı-grupları

$A \in M_n(\mathbb{C})$ verildiğinde matris yarı gruplarında e^{tA}'nın nasıl hesaplanacağını inceleyelim.

i) $A = diag(a_1, \dots, a_n)$ olsun. A matrisi tarafından üretilen yarı-grup

$$e^{tA} = diag(e^{ta_1}, \dots, e^{ta_n}) \text{ 'dir.}$$

ii) $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$J_{mxm} = \lambda I + N = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ matrisini tanımlayalım.

Üstel matrisin tanımından, $$e^{tN} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{t^n N^n}{n!} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ olduğu gösterilebilir ve $e^{tJ} = e^{t\lambda} e^{tN}$ olur.

Çarpım Yarı-grupları

Önerme: $D(M_q)$ tanım kümesine sahip M_q, $C_0(\mathbb{R})$ üzerinde sürekli bir q fonksiyonu tarafından indüklenen çarpma operatörü olsun, ardından aşağıdakiler geçerli olur:

i) M_q kapalı ve yoğun olarak tanımlıdır.

ii) M_q'nun sınırlı ($D(M_q) = C_0(\mathbb{R})$) olması için gerek ve yeter şart q'nun sınırlı olmasıdır. Bu durumda,

$$\left|\left|M_q\right|\right| = ||q|| := sup_{s\in\mathbb{R}}|q(s)| \quad \text{olur.}$$

iii) M_q'nun sınırlı bir tersi olması için gerek ve yeter şart q'nun sınırlı bir tersi $\frac{1}{q}$, yani $0 \notin \overline{q(\mathbb{R})}$ var olmasıdır. Bu durumda,

$$M_q^{-1} = M_{\frac{1}{q}} \text{ olur.}$$

iv) M_q'nun spektrumu, q'nun kapalı aralığıdır, yani

$$\sigma(M_q) = \overline{q(\mathbb{R})} \text{ 'dır.}$$

Öteleme Yarı-grupları

Tanım: Bir $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ve $t \ge 0$ fonksiyonu için,

$$(T_l(t)f)(x) := f(x+t), x \in \mathbb{R},$$

sol öteleme (f'nin t'ye göre), iken

$$(T_r(t)f)(x) := f(x-t), x \in \mathbb{R},$$

(f'nin t'ye göre) sağ ötelemesidir.

$X := C_0(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerinde sonsuzda sıfır olan tüm sürekli fonksiyonların Banach uzayı olsun. $T(t)$ operatörünü tanımlayalım,

$$(T(t)f)(x) := f(t+x),$$

burada $x, t \in \mathbb{R}$ ve $f \in X$. f fonksiyonunu, yarı-grup özelliklerin

$T(t+s) = T(t)T(s)$ ve $T(0) = I$

sağlar.

DÜZGÜN SÜREKLİ YARI-GRUP

Sınırlı lineer operatörlerin bir T(t) yarı-grubu eğer

$\lim_{t\to 0}\left|\left|T(t) - I\right|\right| = 0$ özelliğini sağlıyor ise düzgün sürekli yarı-grup adını alır.

Yani $t \to$T(t) tasviri süreklidir.

YARI-GRUBUN SONSUZ KÜÇÜK ÜRETECİ: Tanım kümesi $D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \right\}$ olan ve $x \in D(A)$ için,

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+ T(t)x}{dt}\Big|_{t=0}$$

biçiminde tanımlanan A lineer operatörüne, $T(t)$ yarı-grubunun sonsuz küçük üreteci denir.

Eğer T(t) sınırlı lineer operatörlerin düzgün sürekli bir yarı-grubu ise $\lim_{s\to t}\left|\left|T(s) - T(t)\right|\right| = 0$'dır.

A lineer operatörü, $T(t)$ düzgün sürekli yarı-grubunun sonsuz küçük üreteci olması için gyk A'nın sınırlı lineer operatör olmasıdır.

T(t) sınırlı lineer operatörlerin düzgün sürekli bir yarı-grubu ise aşağıdaki özellikler sağlanır:

$\left|\left|T(t)\right|\right| \le e^{wt}$ olacak şekilde w ≥ 0 sayısı vardır.

$T(t) = e^{tA}$ olacak şekilde tek bir A sınırlı lineer operatörü vardır ve A, T(t)'nin sonsuz küçük üretecidir. $T'(t) = AT(t) = T(t)A$

GÜÇLÜ SÜREKLİ YARI-GRUP

X üzerinde bir $T(t)$ yarı-grubu, $(0 \le t < \infty)\ \forall\, x \in X$ için $\lim_{t\to 0} T(t)x = x$ özelliğini sağlıyor ise, güçlü sürekli yarı-grup adını alır.

Yani R^+ dan X e tanımlı $t \to T(t)x$ tasviri süreklidir.

C_0 YARI-GRUBU: X üzerinde sınırlı lineer operatörlerden oluşan bir güçlü sürekli yarı-grubuna, C_0 sınıfının bir yarı-grubu ya da basitçe bir C_0 yarı-grubu denir.

$T(t)$, C_0 yarı-grup ise o zaman $\left|\left|T(t)\right|\right| \le Me^{wt}$ olacak şekilde M ≥ 1 sayısı vardır.

A (sınırsız) lineer operatörü, $T(t)$ C_0 yarı-grubunun sonsuz küçük üreteci ise o zaman A, X'de yoğundur ve kapalı operatördür.

HILLE YOSIDA TEOREMİ

Hille Yosida teoremi, A lineer operatörünün hangi koşullar altında C_0 yarı-grup ürettiğini verir.

BÜZÜLME YARI-GRUBU: Bir T(t) yarı-grubu, eğer $\left|\left|T(t)\right|\right| \le 1$ ise büzülme yarı-grubu adını alır.

REZOLVENT KÜME, REZOLVENT OPERATÖR: A operatörü X'te lineer, sınırlı olmayan bir operatör olsun.

$\lambda I - A$ operatörünün tersinin var ve sınırlı olduğu tüm λ karmaşık sayıları kümesine A'nın rezolvent kümesi denir ve $\rho(A)$ ile gösterilir. Yani $(\lambda I - A)^{-1}$, X'te sınırlı bir lineer operatördür.

$R(\lambda: A) = (\lambda I - A)^{-1}$ ssınırlı lineer operatörüne A'nın rezolvent operatörü kısaca rezolventi denir.

X üzerinde sınırsız A lineer operatörünün $T(t)$ büzülme C_0 yarı-grubunun sonsuz küçük üretecinin karakterizasyonunu veren Hille Yosida teoremini verelim:.

Teorem (Hille Yosida) Lineer (sınırsız) bir A operatörünün, $T(t)$, $t \ge 0$ bir büzülme C_0 yarı-grubunun sonsuz küçük üretici olması için gerek ve yeter koşul;

i) A kapalı ve $\overline{D(A)} = X$ ve

ii) A'nın rezolvent kümesi $\rho(A)$, $\mathbb{R}^+$ içerir ve her $\lambda > 0$ için $\left|\left|R(\lambda: A)\right|\right| \le \frac{1}{\lambda}$ sağlanmasıdır.

YOSIDA YAKLAŞIMI : A operatörünün Yosida yaklaşımı $A_\lambda = \lambda AR(\lambda: A) = \lambda^2 R(\lambda: A) - \lambda I$

A, H Hilbert uzayı üzerinde kapalı lineer operatörü olsun. O zaman her $f \in$ D(A) için $\lim_{\lambda\to 0} A_\lambda f = Af$ ve e^{tA_λ} sınırlı büzülme olur

EVRİM DENKLEMİ: X Banach uzayını ve her t $\in [0,T]$ için $D\big(A(t)\big)$'dan X üzerine bir $A(t)$ lineer operatörünü alalım.

$f: [0,T] \to X$ ve $0 \le s < t < T$ olmak üzere $u'(t) = A(t)u(t) + f(t), u(s) = x$ başlangıç değer problemine Evrim Denklemi denir.

A, X üzerinde bir lineer operatör, tanım kümesi D(A) $\subset$ X ve x $\in$ D(A) olsun. O zaman

$\forall t \ge 0$ için u $\in$ D(A) olmak üzere

$$u'(t) = Au(t)$$
$$u(0) = x$$

Cauchy probleminin çözümü u(t) $\in C'(R^+, X)$ fonksiyonudur ($u: R^+ \to X$ birinci mertebeden sürekli türeve sahip fonksiyon)

$T(t), C_0$ yarı-grubunun bir A üreteci için aşağıdaki koşullar sağlanır:

a) Eğer x $\in$ D(A) $ise\ T(t)x \in D(A)$ ve tüm $t \ge 0.\ için\ AT(t)x = T(t)Ax.$

b) $u: R^+ \to X\ u(t) = T(t)x$ fonksiyonu Cauchy probleminin tek bir çözümüdür.

KAYNAKÇA

[1] Engel K.-J. and R. Nagel, *A Short Course on Operator Semigroups*, Springer-Verlag, 2006.

[2] Pazy A, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1983.

[3] Tepper L. Gill and Woodford W. Zachary, *Functional Analysis and the Feynman Operator Calculus*, Springer International Publishing Switzerland, 2016.